Jurnal Vokasi
2011, Vol.7. No.2 115 - 123

Perbandingan Beberapa Metode Pendugaan Parameter AR(1)

MUHLASAH NOVITASARI M, NANI SETIANINGSIH & DADAN K

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura
Jl. Ahmad Yani Pontianak 78124

Abstrak: Terdapat banyak model peramalan data runtun waktu pada metode Box Jenkins, salah satunya adalah model AR(1). Pendugaan parameter AR (1) dapat dilakukan dengan beberapa metode diantaranya Metode Kuadrat Terkecil, Metode Maksimum *Likelihood* dan Pendekatan Bayes. Pada tulisan ini akan membahas hasil pendugaan nilai parameter AR(1) secara simulasi menggunakan ketiga metode tersebut untuk beberapa ukuran sampel. Kemudian hasil dugaan dari tiap metode dibandingkan untuk mengetahui metode mana yang terbaik untuk menduga parameter AR(1). Kriteria evaluasi parameter penduga adalah nilai bias dan standar deviasi. Hasil simulasi menunjukkan Metode Maksimum *Likelihood* merupakan penduga parameter terbaik bagi AR(1) dibandingkan Metode Kuadrat Terkecil dan Pendekatan Bayes.

Kata-kata kunci: *Autoregresif*, Metode Kuadrat Terkecil, Metode Maksimum *Likelihood*, Pendekatan Bayes, Simulasi Data

Data runtun waktu merupakan data statistik yang sering digunakan dalam metode peramalan. Analisis runtun waktu merupakan suatu teknik atau metode peramalan yang menganalisis pola perubahan suatu variabel dari waktu ke waktu. Salah satu model peramalan dalam analisis *runtun waktu* adalah model *Autoregresif* (AR). Pendugaan parameter pada model AR dapat dilakukan dengan beberapa metode, diantaranya adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT), Metode Maksimum *Likelihood* (MML) dan Pendekatan Bayes. MKT dan MML disebut juga dengan Metode Klasik. Pada Metode Klasik pendugaan hanya didasarkan pada informasi yang diperoleh dari data sampel, lain halnya dengan pendekatan Bayes. Pada pendekatan Bayes pendugaan didasarkan pada penggabungan atau kombinasi pengetahuan subjektif mengenai sebaran peluang yang tidak diketahui yaitu distribusi prior dengan informasi yang diperoleh dari data sampel. Pemilihan distribusi prior menjadi hal yang sangat penting karena dapat mempengaruhi bagaimana hasil dari pendugaan parameter. Ketiga metode dapat memenuhi sifat penduga terbaik ketika penduga yang dihasilkan tak bias dan variansi minimum diantara semua penduga tak bias. Hasil pendugaan parameter juga dipengaruhi ukuran sampel. Biasanya penduga efisien saat ukuran sampel cukup besar. Permasalahan sering terjadi ketika sampel yang dimiliki kurang dari 50, kualitas penaksirannya kurang baik untuk dijadikan penduga parameter. Hal ini terjadi karena informasi tentang prilaku parameter yang diberikan oleh sampel berukuran kecil dapat menyimpang dari keadaan populasi (Rahardjo, S, 2005). Pada tulisan ini akan diduga parameter AR(1) dengan nilai 0,1; 0,3; 0,5; dan 0,7 secara simulasi menggunakan MKT, MML dan pendekatan Bayes untuk beberapa ukuran sampel. Kemudian hasil dugaan dari ketiga metode dibandingkan untuk mengetahui metode terbaik untuk menduga parameter AR(1).

METODE

Langkah awal yang dilakukan adalah melakukan kajian cara menduga parameter AR(1) dengan MKT, MML dan Pendekatan Bayes. Selanjutnya dilakukan simulasi data dengan menggunakan program makro pada Minitab 14. Data simulasi dibangkitkan dari distribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1. Ukuran sampel yang digunakan pada simulasi ini 30, 40, 50 dan 60. Sampel yang dipilih dikombinasikan dengan nilai parameter dari proses AR(1) yaitu mengkorelasikan setiap baris dari setiap data sampel dengan rumus sebagai berikut:

$$x_t = \rho x_{t-1} + e_t \quad , \; t = 2, \ldots , n \tag{1}$$

Dengan x_t adalah variabel periode ke-*t*, x_{t-1} adalah variabel periode ke-*t-1* dan ρ adalah koefisien korelasi dari AR(1)

Nilai koefisien korelasi yang digunakan adalah 0,1; 0,3; 0,5; dan 0,7. Setiap sampel dikorelasikan dengan nilai koefisien korelasi sehingga kombinasi yang dilakukan sebanyak 16 kemungkinan kombinasi. Setiap kombinasi dilakukan sebanyak 100 kali simulasi sehingga nilai dugaan yang didapat adalah 100 nilai dugaan dengan MKT, 100 nilai dugaan dengan MML dan 100 nilai dugaan dengan Pendekatan Bayes. Nilai pendugaan parameter dari tiap metode diperoleh dengan merata-ratakan 100 nilai dugaan untuk setiap metode pendugaan. Tingkat ketepatan dan ketelitian suatu penduga parameter dilakukan dengan melakukan perbandingan terhadap nilai bias dan nilai standar deviasi dari hasil pendugaan.

$$\text{Nilai bias} = \rho - \hat{\rho} \quad (2)$$

$$\text{Standar Deviasi} = \sqrt{\frac{1}{(k-1)}\sum_{i=1}^{n}(\rho_i - \hat{\rho})^2} \quad (3)$$

dengan ρ nilai koefisien korelasi sebenarnya, $\hat{\rho}$ nilai rata-rata penduga koefisien korelasi dari hasil simulasi, ρ_i = nilai koefisien korelasi ketika i dan k banyaknya simulasi yang dilakukan.

HASIL

Nilai penduga parameter AR(1), nilai bias dan nilai standar deviasi dari setiap penduga parameter yang dihasilkan dari simulasi menggunakan program makro pada Minitab 14 disajikan dalam Tabel 1, 2 dan 3 berikut.

Tabel 1. Nilai penduga parameter dengan MKT, MML dan Pendekatan Bayes

Jumlah sampel (n)	**Koefisien korelasi** (ρ)	**Nilai penduga parameter**		
		MKT	**MML**	**Bayes**
$n=30$	$\rho=0,1$	0.111241	0.107405	0.080744
	$\rho=0,3$	0.285820	0.275964	0.096309
	$\rho=0,5$	0.502169	0.484853	0.103400
	$\rho=0,7$	0.693410	0.669499	0.0775549
$n=40$	$\rho=0,1$	0.092526	0.090153	0.0823740
	$\rho=0,3$	0.297642	0.290010	0.055760
	$\rho=0,5$	0.494461	0.481782	0.052436
	$\rho=0,7$	0.690550	0.672843	0.049019
$n=50$	$\rho=0,1$	0.104279	0.102151	0.082035
	$\rho=0,3$	0.304847	0.298626	0.074236
	$\rho=0,5$	0.497136	0.486991	0.067123
	$\rho=0,7$	0.698482	0.684228	0.044000
$n=60$	$\rho=0,1$	0.106266	0.104465	0.051535
	$\rho=0,3$	0.295164	0.290161	0.056288
	$\rho=0,5$	0.513083	0.504386	0.050318
	$\rho=0,7$	0.705856	0.693893	0.0454319

Tabel 1. menunjukkan bahwa nilai rata-rata penduga yang dihasilkan oleh MKT dan MML cenderung mendekati nilai koefisien korelasi dibandingkan dengan nilai

rata-rata penduga yang dihasilkan oleh Pendekatan Bayes. Ukuran sampel dan nilai koefisien korelasi yang diduga tidak mempengaruhi hasil dugaan MKT dan MML. Sedangkan pada Pendekatan Bayes ukuran sampel dan nilai koefisien korelasi yang diduga cukup berpengaruh. Semakin besar koefisien korelasi dan ukuran sampelnya maka semakin menjauh nilai rata-rata penduga yang dihasilkan oleh Pendekatan Bayes.

Tabel 2. Nilai bias dari setiap penduga parameter dengan MKT, MML dan Pendekatan Bayes

Jumlah sampel (n)	**Koefisien korelasi (ρ)**	**Nilai bias penduga**		
		MKT	**MML**	**Bayes**
$n = 30$	$\rho = 0{,}1$	-0.0112412	-0.007405	0.019256
	$\rho = 0{,}3$	0.0141802	0.024036	**0.203691**
	$\rho = 0{,}5$	-0.0021689	0.015147	**0.396600**
	$\rho = 0{,}7$	0.0065903	0.030501	**0.622445**
$n = 40$	$\rho = 0{,}1$	0.0074745	0.0098469	**0.017626**
	$\rho = 0{,}3$	0.0023584	0.009990	**0.244240**
	$\rho = 0{,}5$	0.0055394	0.018218	**0.447564**
	$\rho = 0{,}7$	0.0094501	0.027157	**0.650981**
$n = 50$	$\rho = 0{,}1$	-0.0042791	-0.002151	**0.017965**
	$\rho = 0{,}3$	-0.0048469	0.001375	**0.225764**
	$\rho = 0{,}5$	0.0028635	0.013009	**0.432877**
	$\rho = 0{,}7$	0.0015176	0.015772	**0.656000**
$n = 60$	$\rho = 0{,}1$	-0.006266	-0.004464	**0.048465**
	$\rho = 0{,}3$	0.004836	0.009839	**0.243712**
	$\rho = 0{,}5$	-0.013083	-0.004386	**0.449682**
	$\rho = 0{,}7$	-0.0058563	0.006107	**0.654568**

Nilai bias yang dicetak tebal merupakan nilai yang relatif besar karena $\left|\frac{\text{nilai bias}}{\rho}\right| > 0{,}1$

Tabel 2. menunjukkan bahwa bias yang dihasilkan oleh MKT relatif kecil baik untuk nilai koefisien korelasi yang diduga besar ataupun kecil ketika ukuran sampel besar. Namun ketika ukuran sampel kecil dan nilai koefisien korelasi yang diduga juga kecil maka bias yang dihasilkan besar. Pada MML, secara keseluruhan baik besar ataupun kecil nilai koefisien korelasi dan ukuran sampelnya maka bias yang dihasilkan relatif kecil. Sedangkan pada Pendekatan Bayes, ketika ukuran sampel dan koefisien korelasinya kecil maka bias yang dihasilkan kecil namun ketika ukuran sampel dan koefisien korelasi yang diduga besar maka bias yang dihasilkan relatif besar.

Tabel 3. menunjukkan bahwa semakin besar nilai koefisien korelasi yang diduga dan ukuran sampel yang digunakan maka semakin kecil standar deviasi yang dihasilkan oleh MKT dan MML. Namun demikian dari kedua metode ini, MML menghasilkan nilai standar deviasi yang lebih kecil dibandingkan dengan standar deviasi yang dihasilkan oleh MKT. Sedangkan pada Pendekatan Bayes semakin kecil nilai koefisien korelasi yang diduga maka semakin besar standar deviasi dan semakin besar ukuransampel yang digunakan maka standar deviasinya semakin kecil.

Tabel 3. Nilai standar deviasi dari setiap penduga parameter dengan MKT, MML dan Pendekatan Bayes

Jumlah sampel (n)	Koefisien korelasi (ρ)	Nilai standar deviasi penduga		
		MKT	MML	Bayes
$n = 30$	$\rho = 0{,}1$	0.186260	0.179838	0.236591
	$\rho = 0{,}3$	0.179123	0.172946	0.248967
	$\rho = 0{,}5$	0.166098	0.160370	0.258887
	$\rho = 0{,}7$	0.125183	0.120866	0.215303
$n = 40$	$\rho = 0{,}1$	0.154245	0.150290	0.247419
	$\rho = 0{,}3$	0.145314	0.141588	0.203587
	$\rho = 0{,}5$	0.130048	0.126714	0.196327
	$\rho = 0{,}7$	0.115622	0.112658	0.175032
$n = 50$	$\rho = 0{,}1$	0.152885	0.149765	0.237328
	$\rho = 0{,}3$	0.134047	0.131311	0.221539
	$\rho = 0{,}5$	0.131880	0.129189	0.217974
	$\rho = 0{,}7$	0.107658	0.105461	0.194737
$n = 60$	$\rho = 0{,}1$	0.129479	0.127284	0.190170
	$\rho = 0{,}3$	0.125106	0.122986	0.197483
	$\rho = 0{,}5$	0.107175	0.105359	0.186589
	$\rho = 0{,}7$	0.097176	0.095529	0.174231

PEMBAHASAN

Dalam model AR, nilai pengamatan x_t berhubungan langsung dengan sejumlah *p* pengamatan pada waktu sebelumnya. Bentuk umum dari model AR dengan order *p* atau yang biasa ditulis AR(*p*) dinyatakan sebagai berikut :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + a_t \tag{4}$$

dengan x_t adalah nilai pengamatan pada periode ke-*t*, x_{t-p} adalah nilai pengamatan pada *p* periode sebelumnya, $ø_p$ adalah parameter AR dengan order *p*, dan a_t adalah nilai *error* pada periode ke-*t*. Nilai *error* a_t diasumsikan bebas dan memiliki nilai rata-rata nol dan variansi $ø^2$. Nilai a_t merupakan proses *white noise*, dinotasikan dengan $\{a_t\}$~ WN (0, $ø^2$) (Hamilton, 1994). Model AR(*p*) pada persamaan (1) adalah proses yang memenuhi asumsi stasioner jika akar-akar dari ϕ(L) = 0 harus berada diluar lingkaran satuan ($|G_i| < 1$), dimana *i* = 1, 2, ..., *p* (Box dan Jenkins, 1976). Nilai autokorelasi sampel dihitung dengan rumus

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} \qquad (5)$$

Nilai dari fungsi autokorelasi parsial sampel dirumuskan sebagai berikut:

$$\phi_{11} = \rho_1 \qquad (6)$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_j} \quad \text{untuk } k = 2, 3, 4, \ldots \qquad (7)$$

dengan $\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\hat{\phi}_{k-1,k-j}$ untuk $j = 1, 2, \ldots, k-1$ (8)

Pendugaan parameter AR dapat dilakukan dengan beberapa metode. Dalam tulisan ini, penulis hanya membahas tiga metode dari pendugaan parameter yakni MKT, MML dan Pendekatan Bayes. MKT adalah metode pendugaan parameter dengan meminimumkan jumlah kuadrat error. Dalam menduga parameter AR (1) meminimumkan jumlah kuadrat error dilakukan meminumkan jumlah kuadrat $S(\phi,\theta)$ sehingga diperoleh penduga parameter AR(1) yang dinotasikan dengan $\hat{\phi}$ pada persamaan (9) :

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} x_t x_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} x_{t-1}^2} \qquad (9)$$

Fungsi *likelihood* adalah fungsi padat peluang dipandang sebagai fungsi dari parameter untuk nilai $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Fungsi *likelihood* dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (10) berikut:

$$L(\phi) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n | \phi) = f(x_1|\phi) f(x_2|\phi) \cdots f(x_n|\phi) \qquad (10)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\phi)$$

Dengan: $L(\phi)$ = fungsi *likelihood* bagi ϕ, $f(x_i|\phi)$ = fungsi dari nilai-nilai sampel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan parameter ϕ, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Berdasarkan persamaan (10) maka fungsi *likelihood* pada runtun waktu dinyatakan seperti pada persamaan (11) berikut:

$$L(\phi, \sigma^2 | x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} |\mathbf{Z}'\mathbf{Z}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(\phi|x)\right] \qquad (11)$$

Secara khusus, fungsi *likelihood* untuk model AR(1) dapat dinyatakan dalam persamaan (12):

$$L(\phi, \sigma^2 | x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}(1-\phi^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{t=2}^{n}(x_t - \phi x_{t-1})^2\right\}\right] \qquad (12)$$

Penduga Maksimum *Likelihood* bagi parameter ϕ pada AR(1) adalah nilai $\hat{\phi}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\phi)$, yaitu $\hat{\phi} = \frac{n-2}{n-1}\frac{\sum_{t=2}^{n} x_t x_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} x_{t-1}^2}$.

Selanjutnya akan dibahas tentang menduga parameter AR (1) dengan Pendekatan Bayes. Parameter prior yang digunakan adalah prior non-informatif berdistribusi *Jeffrey* dan dinotasikan dengan $f(\phi)$.

$$f(\phi) = f(\mu, \sigma) \equiv \frac{1}{\sigma} \quad \text{dengan} \quad -\infty < \mu < \infty \,, \quad 0 < \sigma < \infty \qquad (13)$$

Selanjutnya akan dicari distribusi posterior untuk model AR(1). Distribusi posterior, $f(\phi|x)$, merupakan perbandingan perkalian antara prior dan *likelihood* sampel.

$$f(\phi|x) \propto f(\phi) f(x|\phi) \qquad (14)$$

Dengan menggunakan fungsi *likelihood* sampel untuk AR (12) pada persamaan (13) dan fungsi prior pada persamaan (14) diperoleh distribusi posterior proses

AR(1) seperti pada persamaan (15) berikut:

$$f(\phi|x) \propto \left\{ 1 + \frac{(\phi - \hat{\phi})^2 \sum_{t=3}^{n} x_{t-1}^2}{S(\hat{\phi})} \right\}^{-n/2} \qquad (15)$$

Nilai $\hat{\phi}$ pada persamaan (15) berdasarkan nilai $\hat{\phi}$ dari MKT pada persamaan (9) dan $S(\hat{\phi}) = \left\{ \frac{1 - \hat{\phi}^2}{n} \right\}^{1/2}$

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil analisis dapat ditarik kesimpulan bahwa pada proses AR(1): 1) MKT baik digunakan untuk menduga parameter AR(1) ketika sampel data besar karena MKT menghasilkan penduga tak bias dan efisien ketika sampelnya besar; 2) Pendekatan Bayes menghasilkan penduga tak bias dan efisien ketika nilai parameter AR(1) yang diduga dan ukuran sampel kecil; dan 3) MML dapat menghasilkan penduga tak bias dan efisien untuk parameter AR(1)pada segala kondisi. Baik pada saat nilai parameter AR(1) yang diduga tinggi maupun rendah dan ukuran sampel data besar ataupun kecil. Oleh karena itu, Metode Maksimum *Likelihood* merupakan penduga parameter terbaik bagi AR(1) dibandingkan MKT dan Pendekatan Bayes.

Saran

Penelitian ini dilakukan hanya pada AR(1) sehingga tidak berlaku secara umum untuk semua model ARIMA. Mengingat hal tersebut perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk model ARIMA yang lain seperti AR dengan orde lebih tinggi dan model MA(q).

DAFTAR PUSTAKA

Abraham, B. and Ledolter, J. (1983). *Statistical Methods for Forecasting*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Assauri, S. (1984). *Teknik dan Metoda Peramalan: Penerapannya Dalam Ekonomi dan Dunia Usaha*. Edisi Satu. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Blank, L., (1980). *Statistical Procedures for Engineering, Management and Science*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Revised Edition. San Fransisco: Holden Day.

Brunk, H. D. (1960). *An Introduction to Mathematical Statistics*. Third Edition, Massachucetts: Xerox College Publishing.

DeGroot, M. H. (1986). *Probability and Statistics*. Second Edition. Canada: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

Hines, W. W. and Montgomery, D. C. (1990). *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*.Third Edition. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Judge, G.G. *et al*. (1982). *Introduction to The Theory and Practice of Econometrics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Maddala, G.S. (1977). *Econometrics*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Rahardjo, S. (2005). *Identifikasi Kestasioner Proses Autoregressive Secara Analitis*. http://digilib.math.itb.ac.id/go.php?id=jbptitbmath-gdl-s3-2006-swasonorah-983 (3 Mei 2007).

Spiegel, M. R., and Stephen, L. J. (1999). *Schaum"s Outlines Statistik.* Edisi Ketiga Kastawan, W., dan Harmein, I. (alih bahasa). Jakarta: Erlangga.

Suharjo, B. (2007). *Estimasi Parameter Distribusi Mixture Normal dengan Pendekatan Bayesian Menggunakan Software Winbugs 1.4.* http://www.aal.ac.id/~bambang_suharjo/uploads/File/mixture%20normal.pdf. (12 November 2007).

Warsito, B. (2004). *Model Neural Network untuk Proses Nonlinier Autoregressive Data Finansial* (Tesis).Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.